

模糊区间值截距阵 $[D]_{[a,b]}$ 的若干性质

关却东智¹, 更芷拉毛¹, 索南仁欠^{1,2*}

(1. 青海师范大学 数学与统计学院, 青海 西宁 810008; 2. 青海师范大学 研究生院, 青海 西宁 810008)

摘 要:针对模糊区间值矩阵与模糊决策者心态(区间阈值)偏好等不能准确反映的问题, 将排序函数比较法引入到模糊区间值矩阵, 利用优势、劣势和优劣度综合的信度值度量偏好问题, 从而使模糊区间值矩阵转化为模糊矩阵。分析了三种定义的原理与特点, 研究其性质, 证明了模糊区间值的截距阵在其领域内上具有序结构, 但三种截距阵不满足封闭性, 并结合例子检验三种模型的适用范围。

关键词:排序函数; 模糊区间值; 优劣度; 信度

中图分类号: O189 **文献标志码:** A **文章编号:** 2095-4824(2020)06-0089-06

由于客观事物的复杂性和不确定性, 以及人类思维的模糊性和有限性, 人们往往不能明确地给出具体数值, 只能给出一个区间范围, 这种区间范围是以区间值(或区间数)的形式来表示。区间值代表了一种不确定性, 目前在许多领域都有着很大的应用潜力。例如, 利用区间值进行不确定的多属性决策, 将区间值添加到数学规划之中形成不确定性优化模型, 模糊区间值综合决策模型, 等等。其中的模糊区间值综合决策是近年来发展较为成熟的一种模糊数学方法, 它广泛应用于环境质量评价、气象预报、经济管理及教学过程的评价等领域。

Moore 最早提出并深入研究了区间值, 给出了相关运算性质和区间值间的排序方法^[1]。而 Moore 定义的排序方法无法比较具有交叉重叠时的区间值排序问题。之后, 曾文艺等^[2]利用区间值平均法给出排序方法, Sengupta 和 Pal^[3]基于序关系给出区间值排序法, 刘进生等^[4]定义了一种比较区间值的度量函数, 还有赵慧冬等^[5]的几何平均排序函数。李德清等^[6]系统梳理了常用的区间数排序方法, 详细介绍了每一类排序方法的

主要思想, 分析了每种方法的特点和不足, 特别是在已有的基础上深入讨论了基于可能度矩阵的区间数排序方法。区间值排序方法针对不同实际问题的需要, 还有很多有特色的排序方法。近年来, 很多国内外专家将区间值引入模糊数学, 构建了特色的模糊区间值理论。但是, 应用上述排序方法比较模糊区间值会带有不同程度的过拟合和欠拟合现象。排序方法最终目的是描述两区间数间的相似和贴度大小, 从而刻画决策者的心态偏好。

为了准确反映模糊区间值矩阵与模糊决策者心态(模糊区间阈值)偏好等问题, 本文给出了一种排序函数, 用来比较模糊区间值, 并利用这种方法定义模糊区间值矩阵的 $[a, b]$ -截距阵。排序函数比较法将模糊区间值映射到模糊矩阵对应排序函数图像的坐标轴上后, 再利用优劣度、交点、信度等概念, 把模糊区间值矩阵转化为模糊矩阵, 并用模糊矩阵的相关性质和解决方法解决实际模糊区间值矩阵问题, 而模糊矩阵的截距阵已有广泛研究和应用。本文通过研究优势、劣势、信度的度量值来等价转化为模糊区间值, 最后得到模糊

收稿日期: 2020-09-11

基金项目: 青海省自然科学基金项目(2016-ZJ-1024)

作者简介: 关却东智(1993-), 男, 藏族, 青海循化人, 青海师范大学数学与统计学院学生。

更芷拉毛(1997-), 女, 藏族, 青海贵德人, 青海师范大学数学与统计学院学生。

索南仁欠(1969-), 男, 藏族, 青海平安人, 青海师范大学研究生院教授, 博士, 本文通信作者。

矩阵的相关代数性质。本文也给出了一些例子说明优势、劣势和信度的度量值评价决策偏好的可行性。

1 预备知识

定义 1(模糊区间值)^[7] 若 $[A] = [\bar{a}^-, a^+]$, 对于任意的 $\bar{a}^-, a^+$ 满足 $0 \leq \bar{a}^- \leq a^+ \leq 1$, 则称 $[A]$ 为模糊区间值, 其中, $\bar{a}^-$ 为下元, a^+ 为上元。模糊区间值 $[a, a] = a$ (等同于数 a , 且 $a \in [0, 1]$)。记全体模糊区间值构成的集合为 I 。

模糊区间值是区间值的数值限制在 $[0, 1]$ 中的特殊区间值, 同时, 模糊区间值具有如下独异的运算方法。

定理 1(模糊区间值的相关运算)^[8] 设区间值 $[A] = [\bar{a}^-, a^+]$, $[B] = [\bar{b}^-, b^+]$, 则有如下运算规则:

$$1) [A] \wedge [B] = [\bar{a}^- \wedge \bar{b}^-, a^+ \wedge b^+] =$$

$$[\min(\bar{a}^-, \bar{b}^-), \min(a^+, b^+)]$$

$$2) [A] \vee [B] = [\bar{a}^- \vee \bar{b}^-, a^+ \vee b^+] =$$

$$[\max(\bar{a}^-, \bar{b}^-), \max(a^+, b^+)]$$

$$3) [A] + [B] = [\bar{a}^- + \bar{b}^-, a^+ + b^+]$$

$$4) k[A] = [k\bar{a}^-, ka^+], (k > 0)$$

$$5) \overline{[A]} = [1 - \bar{a}^-, 1 - a^+], [A] \text{ 的补运算。}$$

$$6) [A] = [B], \text{ 当且仅当 } \bar{a}^- = \bar{b}^-, a^+ = b^+.$$

定义 2(同态映射)^[9] 设 G, S 是在 $*$ 与 $\circ$ 运算下具有封闭性和结合律的代数系统, δ 是从 G 到 S 上的映射。若 $a, b \in G$ 满足

$$\delta(a * b) = \delta(a) \circ \delta(b)$$

则称 δ 是 G 到 S 的同态映射, 简称 G 与 S 同态。

1) 若 δ 是单射, 则称 G 与 S 单同态。

2) 若 δ 是满射, 则称 G 与 S 满同态, 记作 $G \sim S$ 。

3) 若 δ 是双射, 则称 δ 是 G 到 S 的同构映射, 并称 G 与 S 同构, 记作 $G \cong S$ 。

定义 3(序关系)^[8] 设 $<$ 是 I 上的一个二元关系, 对于任意区间值 $[A] = [\bar{a}^-, a^+]$, $[B] = [\bar{b}^-, b^+]$, 若 $<$ 满足下面 6 条性质, 则称 $<$ 为上的一个序关系。

1) 自反性: $[A] < [A]$ 。

2) 传递性: 若 $[A] < [B]$ 且 $[B] < [C]$, 则 $[A] < [C]$ 。

3) 完全性: 对任意的 $[A], [B] \in I$ 时, 一定有 $[A] < [B]$ 或者 $[B] < [A]$ 。

4) 分离性: 若 $\bar{a}^- \leq \bar{b}^-$, 则 $[A] < [B]$ 。

5) 相容性: 若 $[A] < [B]$, 则当 $[A], [B] \in$

I 时, 一定有 $[A] \leq [B]$ 。

6) 线性性: 若 $[A] < [B]$, 则对于任意的 $[C] \in I$ 及实数 $k \geq 0$, 一定有

$$[A] + [C] < [B] + [C], k[A] < k[B].$$

定义 4(二元运算)^[9] 设 S 是一个非空集合, $S \times S$ 到 A 的映射成为 S 上的二元运算。

一般地, S^n 到 S 的映射成为 S 上的 n 元运算。

定义 5(代数系统)^[9] 设非空集合 S , 则 S 上 k 个一元或二元运算 $f_1, f_2, \dots, f_k$ 组成的系统称为代数系统, 记作 $\langle S, f_1, f_2, f_3, \dots, f_k \rangle$

2 模糊区间值截距矩阵的定义及若干性质

定义 6 若矩阵 D 中的元素都是模糊区间值 $[\bar{a}_{ij}^-, a_{ij}^+] \subset [0, 1], i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m$, 有

$$[D] = \begin{bmatrix} [\bar{a}_{11}^-, a_{11}^+] & [\bar{a}_{12}^-, a_{12}^+] & \cdots & [\bar{a}_{1m}^-, a_{1m}^+] \\ [\bar{a}_{21}^-, a_{21}^+] & [\bar{a}_{22}^-, a_{22}^+] & \cdots & [\bar{a}_{2m}^-, a_{2m}^+] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [\bar{a}_{n1}^-, a_{n1}^+] & [\bar{a}_{n2}^-, a_{n2}^+] & \cdots & [\bar{a}_{nm}^-, a_{nm}^+] \end{bmatrix}$$

则称 $[D]$ 为模糊区间值矩阵。

定义 7 设 $[D]$ 表示模糊区间值矩阵, 则称 $[D]_{[a, b]}$ ($[a, b] \subset [0, 1]$) 为 $[D]$ 的 $[a, b]$ -截距矩阵, 其中 $[D] = ([\bar{a}_{ij}^-, a_{ij}^+])_{n \times m}$, $[\bar{a}_{ij}^-, a_{ij}^+] \subset [0, 1], i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m$, $[D]_{[a, b]} = (([\bar{a}_{ij}^-, a_{ij}^+])_{n \times m} \geq [a, b])_{n \times m}$, $\geq$ 是排序函数的序关系符号。

定义 8^[10] 对于任意的模糊区间值 $[A] = [\bar{a}^-, a^+]$, 则称

$$f_{[A]}(x) = \bar{a}^- + (a^+ - \bar{a}^-)x, x \in [0, 1]$$

为模糊区间值 $[A]$ 的排序函数。

定义 9^[11-12] 对于任意的模糊区间值 $[A] = [\bar{a}^-, a^+]$, $[B] = [\bar{b}^-, b^+]$, 则

1) 若模糊区间值的排序函数 $f_{[A]}(x) < f_{[B]}(x)$, 则称模糊区间值 $[A]$ 劣于 $[B]$ 。

2) 若模糊区间值的排序函数 $f_{[A]}(x) > f_{[B]}(x)$, 则称模糊区间值 $[A]$ 优于 $[B]$ 。

3) 若模糊区间值的排序函数 $f_{[A]}(x) = f_{[B]}(x)$, 则称模糊区间值 $[A]$ 等于 $[B]$ 。

定理 2^[13-14] 对于任意的模糊区间值 $[A] = [\bar{a}^-, a^+]$, $[B] = [\bar{b}^-, b^+]$, ($[A] \neq [B]$) 则

1) 排序函数 $f_{[A]}(x)$ 单调非减函数。

2) 排序函数 $f_{[A]}(x), f_{[B]}(x)$ 图象至多一个交点, 简称交点。

3) 交点的横坐标为

$$x^* = \frac{a^- - b^-}{(b^+ - a^+) + (a^- - b^-)}$$

证明 1) 排序函数是定义域为 $x \in [0, 1]$ 的一次函数, 且斜率为正, 即 $a^+ - a^- \geq 0$, 故排序函数为单调非减函数。

2) 排序函数定义域 $x \in [0, 1]$ 内的交点可分为如下不同情形;

情形一: $a^+ - a^- = b^+ - b^-$ 时, 无交点。

情形二: $a^- = b^-$, $a^+ - a^- \neq b^+ - b^-$ 时, 下元为交点。

情形三: $a^+ = b^+$, $a^+ - a^- \neq b^+ - b^-$ 时, 上元为交点。

情形四: $a^- \neq b^-$, $a^+ \neq b^+$, $a^+ - a^- \neq b^+ - b^-$ 时, 交点的横坐标为 $\frac{a^- - b^-}{(b^+ - a^+) + (a^- - b^-)}$

综上所述, 排序函数的交点要么在定义域内, 要么在定义域外(不作考虑), 因此, 排序函数 $f_{[A]}(x)$, $f_{[B]}(x)$ 图象至多一个交点。

定义 10 1) 设 $[D]$ 表示模糊区间值矩阵, 从优势程度的角度, 则可得 $[D]$ 的 $[a, b]$ -截距阵,

$$([D]_{[a,b]})_{ij} = \begin{cases} 1, & f_{[a_{ij}^-, a_{ij}^+]}(x) > f_{[a,b]}(x) \\ 0, & f_{[a_{ij}^-, a_{ij}^+]}(x) < f_{[a,b]}(x) \\ \delta, & \{x \mid f_{[a_{ij}^-, a_{ij}^+]}(x) = f_{[a,b]}(x), a_{ij}^+ \geq b\} \end{cases}$$

式中: $\delta = \frac{a_{ij}^+ - f_{[a_{ij}^-, a_{ij}^+]}(x^*)}{a_{ij}^+ - a_{ij}^-}$ 称 δ 为模糊区间值矩阵 $[D]$ 对于区间值 $[a, b]$ 的优势程度, 并将优势度衡量的 $[D]$ 的截距阵 $[D]_{[a,b]}$, 记作 $adv[D]_{[a,b]}$ 。

2) 设 $[D]$ 表示模糊区间值矩阵, 从劣势程度的角度可得 $[D]$ 的 $[a, b]$ -截距阵, 则有

$$([D]_{[a,b]})_{ij} = \begin{cases} 1, & f_{[a_{ij}^-, a_{ij}^+]}(x) < f_{[a,b]}(x) \\ 0, & f_{[a_{ij}^-, a_{ij}^+]}(x) > f_{[a,b]}(x) \\ \tau, & \{x \mid f_{[a_{ij}^-, a_{ij}^+]}(x) = f_{[a,b]}(x), a_{ij}^+ \leq b\} \end{cases}$$

式中: $\tau = \frac{f_{[a_{ij}^-, a_{ij}^+]}(x^*) - a_{ij}^-}{a_{ij}^+ - a_{ij}^-}$ 称 τ 为模糊区间值矩阵 $[D]$ 对于区间值 $[a, b]$ 的劣势程度, 并将劣势度衡量的 $[D]$ 的截距阵 $[D]_{[a,b]}$, 记作 $Inf[D]_{[a,b]}$ 。

3) 设 $[D]$ 是 $m \times n$ 阶模糊区间值矩阵, 从 $[D]$ 中元素优于 $[a, b]$ 的可信角度可得 $[D]$ 的 $[a, b]$ -截距阵, 且有

$$([D]_{[a,b]})_{ij} = (1 - x_{ij}^*)_{m \times n}$$

式中: $x_{ij}^* = \min\{x \mid f_{[a_{ij}^-, a_{ij}^+]}(x) > f_{[a,b]}(x)\}$ 称

$1 - x_{ij}^*$ 为模糊区间值矩阵 $[D]$ 的信度, $(x_{ij}^*)_{m \times n}$ 称为信度矩阵, 并将信度矩阵衡量的 $[D]$ 的截距阵 $[D]_{[a,b]}$, 记作 $rel[D]_{[a,b]}$ 。

以上三种定义方式各有特点, 可用来刻画模糊区间值相似、大于或优于(小于或者劣于, 两者综合应用)另一个区间值的程度, 这种程度恰好可以反映决策者的偏好信息。

$adv[D]_{[a,b]}$ 和 $Inf[D]_{[a,b]}$ 是 $[a, b]$ 在排序函数 $f_{[D]}(x)$ 上的纵坐标轴投影, 表明其模糊区间值 $[a, b]$ 在 $[D]$ 上的截距阵。此时, 截距阵表示模糊区间值矩阵与模糊区间值之间的优劣程度或者相似程度, 而 $rel[D]_{[a,b]}$ 是两种排序函数 $f_{[D]}(x)$ 在横坐标轴的投影, 表示两种排序函数在 $[x^*, 1]$ 上的同时射影, 这是一种互为条件, 互相影响的模型。前两种是主因素突出时应用效果较好, 后一种 $rel[D]_{[a,b]}$ 信度矩阵, 它的模糊程度较高, 在各因素都起作用时应用效果较好。

例 1 $[D]$ 表示模糊区间值矩阵

$$[D] = \begin{bmatrix} [0.4, 0.7] & [0.3, 0.5] & [0.2, 0.5] \\ [0.2, 0.6] & [0.5, 0.7] & [0, 1] \\ [0.4, 0.7] & [0.4, 0.6] & [1, 1] \end{bmatrix}$$

模糊区间值 $[0.4, 0.6]$ 处的三种定义下的截距阵。

在模糊区间值 $[0.4, 0.6]$ 处的排序函数 $f_{[0.4, 0.6]}(x) = 0.2x + 0.4$, 在模糊区间 $[0.4, 0.7]$ 处的排序函数值 $f_{[0.4, 0.7]}(x) = 0.3x + 0.4$, 在模糊区间值 $[0.3, 0.5]$ 处的排序函数 $f_{[0.3, 0.5]}(x) = 0.2x + 0.3$, 在模糊区间值 $[0, 1]$ 处的排序函数为 $f_{[0, 1]}(x) = x$, 则根据定义 10, 在定义域 $[0, 1]$ 内 $f_{[0.4, 0.7]}(x) > f_{[0.4, 0.6]}(x)$ 时取 1, 在定义域 $[0, 1]$ 内 $f_{[0.3, 0.5]}(x) > f_{[0.4, 0.6]}(x)$ 时取 0, 在定义域 $[0, 1]$ 内 $\{x^* \mid f_{[0, 1]}(x) = f_{[0.4, 0.6]}(x)\}$ 时交点为 0.5, 再代入

$$\delta = \frac{a_{ij}^+ - f_{[a_{ij}^-, a_{ij}^+]}(x^*)}{a_{ij}^+ - a_{ij}^-}$$

有 $\delta = 0.5$, 因此如上算法可得用优势度衡量的 $[D]$ 的截距阵为

$$adv[D]_{[0.4, 0.6]} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0.5 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

劣势度衡量的 $[D]$ 的截距阵为

$$Inf[D]_{[0.4, 0.6]} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

利用排序函数先求出信度矩阵 $x_{ij}^* = \min\{x \mid f_{[a_i^-, a_i^+]}(x) > f_{[a, b]}(x)\}$, 在模糊区间值 $[0.4, 0.6]$ 处的排序函数 $f_{[0.4, 0.6]}(x) = 0.2x + 0.4$, 在模糊区间值 $[0.4, 0.7]$ 处的排序函数值 $f_{[0.4, 0.7]}(x) = 0.3x + 0.4$, 在模糊区间值 $[0.3, 0.5]$ 处的排序函数 $f_{[0.3, 0.5]}(x) = 0.2x + 0.3$, 在区间值 $[0, 1]$ 处的排序函数为 $f_{[0, 1]}(x) = x$, 则根据定义, 在定义域 $[0, 1]$ 内 $\min\{x^* \mid f_{[0.4, 0.7]}(x) > f_{[0.4, 0.6]}(x)\}$ 时取 0, 在定义域 $[0, 1]$ 内 $\min\{x^* \mid f_{[0.3, 0.5]}(x) < f_{[0.4, 0.6]}(x)\}$ 时取 0, 在定义域 $[0, 1]$ 内 $\min\{x^* \mid f_{[0, 1]}(x) = f_{[0.4, 0.6]}(x)\}$ 时交点为 0.5, 则信度矩阵为

$$(x_{ij}^*)_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0.5 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

则信度衡量的 $[D]$ 的截矩阵为

$$rel[D]_{[a, b]} = 1 - (x_{ij}^*)_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

由上例可知, 信度矩阵计算简单, 是劣度和优良的综合体现, 不过也有部分缺点, 若排序函数图像斜率一致时, 信度将它收缩为零, 这是不符合实际的。因此, 应该结合优度和劣度矩阵对问题分析。

定理 3 三种定义下模糊区间值矩阵对于 $\geq_{[a, b]}$ 在 I 上具有序关系。

证明 1) 自反性: $[A]_{[a, b]} \geq [A]_{[a, b]}$ 。

2) 传递性: 若 $[A]_{[a, b]} \leq [B]_{[a, b]}$ 且 $[B]_{[a, b]} \leq [C]_{[a, b]}$, 则 $[A]_{[a, b]} \leq [C]_{[a, b]}$ 。

3) 完全性: 对于任意 $[A]_{[a, b]}$ 与 $[B]_{[a, b]}$, 必有 $[A]_{[a, b]} \leq [B]_{[a, b]}$ 或者 $[A]_{[a, b]} \geq [B]_{[a, b]}$ 。

4) 分离性: 若 $a^+ \leq b^-$, 则区间数定义的 $a^- \leq a^+ \leq b^- \leq b^+$, 从而有

$$[a^-, a^+]_{[a, b]} \leq [b^-, b^+]_{[a, b]}$$

5) 相容性: 若 $[a^-, a^+]_{[a, b]} \leq [b^-, b^+]_{[a, b]}$, 则必有 $[a^-, a^+] \leq [b^-, b^+]$

6) 线性性: 若 $[a^-, a^+]_{[a, b]} \leq [b^-, b^+]_{[a, b]}$, 则对任意的 $[\bar{c}, \bar{c}^+]_{[a, b]}$ 及实数 $k > 0$, 一定有 $[a^-, a^+]_{[a, b]} + [\bar{c}, \bar{c}^+]_{[a, b]} \leq [b^-, b^+]_{[a, b]} + [\bar{c}, \bar{c}^+]_{[a, b]}$

$$k[a^-, a^+]_{[a, b]} \leq k[b^-, b^+]_{[a, b]}$$

所以 $\geq_{[a, b]}$ 是 I 上的序关系。

定理 4 i) 任意 $[a_i^-, a_i^+] \subset [a^-,$

$a^+](i = 1, 2, \dots, n)$, 则

1) 当 $a_i^- = a^-$ 时, $adv[a_i^-, a_i^+]_{[a, b]} \leq adv[a^-, a^+]_{[a, b]}$ 。

2) 当 $a_i^+ = a^+$ 时, $Inf[a_i^-, a_i^+]_{[a, b]} \leq Inf[a^-, a^+]_{[a, b]}$ 。

3) 当 $a^- \leq a \leq a_i^-$ 且 $a^+ \leq b \leq a_i^+$ 时, 则有

$$rel[a_i^-, a_i^+]_{[a, b]} \leq rel[a^-, a^+]_{[a, b]}$$

ii) $0 \leq rel[D]_{[a, b]} \leq 1, 0 \leq adv[D]_{[a, b]} \leq 1, 0 \leq Inf[D]_{[a, b]} \leq 1$

iii) 若信度矩阵为 R , 则有 $\overline{rel[D]_{[a, b]}} = R$ 。

iv) 当 $f(x_0) = \frac{a_i^- + a_i^+}{2}$ 时, $adv[D]_{[a, b]}$ 与 $Inf[D]_{[a, b]}$ 可互补。

v) $a_i^- \leq a \leq b \leq a_i^+$ 时才有交点 x_0 。

证明 这里仅证明 3), 其他结论显然成立。

当 $a^- \leq a \leq a_i^-$ 且 $a^+ \leq b \leq a_i^+$ 时, 排序函数有 $f_{[a_i^-, a_i^+]}(x) = a_i^- + (a_i^+ - a_i^-)x$, $f_{[a^-, a^+]}(x) = a^- + (a^+ - a^-)x$, $f_{[a, b]}(x) = a + (b - a)x$ 。

$f_{[a^-, a^+]}(x)$ 与 $f_{[a, b]}(x)$ 交点为

$$x_1^* = \frac{a^- - a}{(a^+ - a^-) - (b - a)}$$

$f_{[a_i^-, a_i^+]}(x)$ 与 $f_{[a, b]}(x)$ 交点为

$$x_2^* = \frac{a_i^- - a}{(a_i^+ - a_i^-) - (b - a)}$$

由已知条件得 $x_2^* \leq x_1^*$, 故有

$$rel[a_i^-, a_i^+]_{[a, b]} = 1 - x_1^* \leq 1 - x_2^* = rel[a^-, a^+]_{[a, b]}$$

定理 5 $[D]$ 表示模糊区间值矩阵, A 表示任意模糊矩阵。代数系统 $\langle [D], + \rangle$ 和 $\langle A, + \rangle$, δ 表示 $rel[D]_{[a, b]}$, $adv[D]_{[a, b]}$, $Inf[D]_{[a, b]}$, 是从 $[D]$ 到 A 上的映射, 若 $[a, b], [c, d] \in [D]$, 则

$$\delta([a, b] + [c, d]) \neq \delta([a, b]) + \delta([c, d]), 0 \leq [a, b] + [c, d] \leq 1$$

$$\delta(k[a, b]) \neq k\delta([a, b]), (k > 0)$$

所以对于加法与数乘, $rel[D]_{[a, b]}$, $adv[D]_{[a, b]}$, $Inf[D]_{[a, b]}$ 不是 $[D]$ 到 A 的同态映射。其中, $[D]$ 表示模糊区间值矩阵, A 表示任意矩阵。

证明 (反证法) $0 \leq \delta([a, b] + [c, d]) \leq 1$, 而 $0 \leq \delta([a, b]) + \delta([c, d]) \leq 2$, 由此可知代数系统 $\langle [D], + \rangle$ 和 $\langle A, + \rangle$ 在 δ 下不封闭。因此, $\delta([D])$ 不一定是 A 的子集。由此可知, 等号不成立。

同理可得, 以下推论。

推论 $\wedge, \vee, \bar{A}$ 分别表示取大、取小、 A 的补运算, $[D], [D_1]$ 和 $[D_2]$ 表示模糊区间值矩阵。

1) 当 $[D_1]$ 不管大于、小于、等于 $[D_2]$ 都有

$$\{[D_1] \vee [D_2]\}_{[a,b]} = [D_1]_{[a,b]} \vee [D_2]_{[a,b]}$$

2) 当 $[D_1]$ 不管大于、小于、等于 $[D_2]$ 都有

$$\{[D_1] \wedge [D_2]\}_{[a,b]} = [D_1]_{[a,b]} \wedge [D_2]_{[a,b]}$$

3) 当 $[D]$ 的所有区间值元素与 $[a, b]$ 的交点皆为 0.5 时, 则有 $\overline{[D]}_{[a,b]} = \overline{[D]}_{[a,b]}$

4) 在模糊区间值矩阵 $[D_1]$ 和 $[D_2]$ 的元素中任意选取区间值 $[\bar{a}_1^-, \bar{a}_1^+]$ 与 $[\bar{a}_2^-, \bar{a}_2^+]$, 且与 $[a, b]$ 的关系为 $\bar{a}_2^- \leq a \leq \bar{a}_1^-$ 且 $\bar{a}_1^+ \leq b \leq \bar{a}_2^+$ 时有

$$\{[D_1] \vee [D_2]\}_{[a,b]} \geq [D_1]_{[a,b]} \vee [D_2]_{[a,b]}$$

5) 在模糊区间值矩阵 $[D_1]$ 和 $[D_2]$ 的元素中任意选取区间值 $[\bar{a}_1^-, \bar{a}_1^+]$ 与 $[\bar{a}_2^-, \bar{a}_2^+]$, 且与 $[a, b]$ 的关系为 $\bar{a}_2^- \leq a \leq \bar{a}_1^-$ 且 $\bar{a}_1^+ \leq b \leq \bar{a}_2^+$ 时有

$$\{[D_1] \wedge [D_2]\}_{[a,b]} \leq [D_1]_{[a,b]} \wedge [D_2]_{[a,b]}$$

定义 11 设 $rel[D]_{[a,b]}$, $adv[D]_{[a,b]}$, $Inf[D]_{[a,b]}$ 分别是优度截矩阵, 劣度截矩阵, 信度截矩阵, 则有

1) 如果 $\lambda = \frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^n (adv[D]_{[a,b]})_{ij}$ 时, 称 λ 为综合优度决策指数。

2) 如果 $\lambda = \frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^n (Inf[D]_{[a,b]})_{ij}$ 时, 称 λ 为综合劣度决策指数。

3) 如果 $\lambda = \frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^n (rel[D]_{[a,b]})_{ij}$ 时, 称 λ 为综合信度决策指数。

定义 12 若综合信度(优度)决策指数 λ 越低, 决策偏好越低, 若综合信度(优度)决策指数 λ 越高, 决策偏好越高。若综合信度(优度)决策指数 $\lambda = 0.5$, 决策偏好中庸。相反, 若综合劣度决策指数 λ 越低, 决策偏好越高, 若综合劣度决策指数 λ 越高, 决策偏好越低。若综合劣度决策指数 $\lambda = 0.5$, 决策偏好中庸。

在模糊综合决策中, 阈值相当重要, 它既反映各个因素在模糊综合决策中占据的地位或者影响其决策结果的程度, 又反映着决策时的决策者的心态偏好指数。

例 2 一辆公交车经过四站点, 期间出事故程度, 如表 1 所示。

表 1 站点间危险度表

站点	最低危险系数	最高危险系数
第一站至第二站	0.2	0.6
第二站至第三站	0.4	0.7
第三站至第四站	0	1
第四站至第一站	0.4	0.6

则危险系数区间值矩阵为

$$[D] = \begin{bmatrix} 0 & [0.2, 0.6] & 0 & [0.4, 0.6] \\ [0.2, 0.6] & 0 & [0.4, 0.7] & 0 \\ 0 & [0.4, 0.7] & 0 & [0, 1] \\ [0.4, 0.6] & 0 & [0, 1] & 0 \end{bmatrix}$$

取阈值为模糊区间值 $[0.4, 0.6]$ 时, 在模糊区间值 $[0.4, 0.6]$ 处的排序函数 $f_{[0.4, 0.6]}(x) = 0.2x + 0.4$, 在模糊区间 $[0.4, 0.7]$ 处的排序函数值 $f_{[0.4, 0.7]}(x) = 0.3x + 0.4$, 在模糊区间 $[0.2, 0.6]$ 处的排序函数值 $f_{[0.2, 0.6]}(x) = 0.4x + 0.2$, 在模糊区间值 $[0, 1]$ 处的排序函数为 $f_{[0, 1]}(x) = x$, 则根据定义, 在定义域 $[0, 1]$ 内 $f_{[0.4, 0.7]}(x) > f_{[0.4, 0.6]}(x)$ 时取 1, 在定义域 $[0, 1]$ 内 $f_{[0.2, 0.6]}(x) > f_{[0.4, 0.6]}(x)$ 时取 0, 在定义域 $[0, 1]$ 内 $\{x^* \mid f_{[0, 1]}(x) = f_{[0.4, 0.6]}(x)\}$ 时交点为 0.5, 再代入

$$\delta = \frac{a_{ij}^+ - f_{[a_{ij}^-, a_{ij}^+]}(x^*)}{a_{ij}^+ - a_{ij}^-}$$

有 $\delta = 0.5$, 所以模糊区间值矩阵优度截矩阵为

$$adv[D]_{[0.4, 0.6]} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0.5 \\ 1 & 0 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}$$

模糊区间值矩阵劣度截矩阵为

$$Inf[D]_{[0.4, 0.6]} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

而根据信度矩阵定义有, 在定义域 $[0, 1]$ 内 $\min\{x^* \mid f_{[0.4, 0.7]}(x) > f_{[0.4, 0.6]}(x)\}$ 时取 0, 在定义域 $[0, 1]$ 内 $\min\{x^* \mid f_{[0.3, 0.5]}(x) < f_{[0.4, 0.6]}(x)\}$ 时取 0, 在定义域 $[0, 1]$ 内 $\min\{x^* \mid f_{[0, 1]}(x) = f_{[0.4, 0.6]}(x)\}$ 时交点为 0.5, 则模糊区间值矩阵信度截矩阵为

$$rel_{[0.4, 0.6]} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}$$

根据三个截矩阵判断,模糊区间值 $[0.4, 0.6]$ 为阈值时,对整体影响较小,不可避免的去掉这种情形。综合优度决策指数为 0.3125,综合劣度决策指数为 0.6875,综合信度决策指数为 0.1875,三种综合决策说明危险系数限制在 0.4 至 0.6 间是不合理的。

3 总结

本文为解决模糊区间值矩阵信息不完全时不能准确反映模糊决策者的心态偏好,将排序函数作为两个区间值之间的距离函数或者相似函数,来定义模糊区间值矩阵的截距阵,进一步利用两区间值的优势程度、劣势程度、相信程度衡量两者的优于(相似)程度,从而用其描述偏好程度关系。具体是将模糊区间值和排序函数映射到模糊矩阵对应的排序函数坐标轴上,进而将模糊区间值矩阵转化为模糊矩阵,并用模糊矩阵的相关性质和处理方法解决实际问题。

[参 考 文 献]

- [1] MOORE R E. Methods and Applications of Interval Analysis[M]. Philadelphia, PA: Society for Industrial and Applied Mathematics(SIAM), 1979.
- [2] 曾文艺,罗承忠,肉孜阿吉. 区间数的综合决策模型[J]. 系统工程理论与实践, 1997, 17(11):48-50.
- [3] SENGUPTA A, PAL T K. On comparing interval numbers[J]. European Journal of Operational Research, 2000, 127(1):28-43.
- [4] 刘进生,王绪柱,张宝玉. 区间数排序[J]. 工程数学学报, 2001, 18(4):103-109.
- [5] 赵慧冬,包玉娥,关世霞. 区间数的几何平均排序函数及其应用[J]. 内蒙古民族大学学报(自然科学版), 2011, 26(6):624-628.
- [6] 李德清,曾文艺,尹乾. 区间数排序方法综述[J]. 北京师范大学学报(自然科学版), 2020(4):483-492.
- [7] 胡启洲,张卫华. 区间数理论的研究及其应用[M]. 北京:科学出版社, 2010.
- [8] 孙海龙,姚卫星. 区间数排序方法评述[J]. 系统工程学报, 2010, 25(3):304-312.
- [9] 张永瑞. 近世代数基础[M]. 北京:高等教育出版社, 2010.
- [10] 吴江,黄登仕. 区间数排序方法研究综述[J]. 系统工程, 2004, 22(8):1-4.
- [11] 张全,樊治平,潘德惠. 区间数多属性决策中一种带有可能度的排序方法[J]. 控制与决策, 1999, 14(6):703-706.
- [12] 郭志林,薛明志. Fuzzy 区间数的一种排序方法及综合评判模型[J]. 数学的认识与实践, 2005, 35(7):244-247.
- [13] 谢海. 基于改进的相对优势度的区间数排序[J]. 科学技术与工程, 2008, 8(22):5983-5986.
- [14] 张吉军. 区间数的排序方法研究[J]. 运筹与管理, 2003, 12(3):18-22.

(责任编辑:熊文涛)