第 41 卷第 3 期
2021 年 5 月

湖北工程学院学报
JOURNAL OF HUBEI ENGINEERING UNIVERSITY

VOL.41 NO.3
MAY 2021

关于二维线性自治系统的相图的教学

樊自安
（湖北工程学院 数学与统计学院，湖北 孝感 432000）

摘 要：正确理解并作出二维线性自治系统的相图是常微分方程中的一个重要技巧，然而，学生对这一方法理解较困难，很难画出正确的相图，特别是奇点为两向结点的二维线性自治系统的相图。针对此问题，给出了奇点为两向结点二维线性自治系统相图的一些性质，便于学生理解和作出二维线性自治系统的相图。

关键词：二维自治系统；相图；奇点；两向结点

中图分类号：O175.13　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：2095－4824(2021)03－0049－03

解的稳定性理论是“常微分方程”课程中的一个重要知识点，如何正确作出二维线性自治系统的相图是一个教学重点。在几本经典的教材中[1-5]，仅给出了相图的大致思路，但要作出二维线性自治系统的相图，特别是奇点是两向结点的二维线性自治系统的相图，学生一般感觉较困难。文献[6]以极坐标为基础，借助仿射变换，研究了二维线性自治系统的相图；文献[7]对平面齐次多项式系统的平衡点的稳定性进行了分析，并给出对应系统的全局相图及具体系统，关于微分系统的稳定性，参考文献[8－10]。

对于二维线性自治系统：

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax + by \\ \dfrac{dy}{dt} = cx + d_1 y \end{cases} \tag{1}$$

设系数矩阵 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d_1 \end{pmatrix}$，若 $\det(A) \neq 0$，则称 $(0,0)$ 为初等奇点，本文主要讨论初等奇点。

系数矩阵 A 的特征方程为：

$$\det[A - \lambda E] = \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d_1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a + d_1)\lambda + (ad_1 - bc) = 0 \tag{2}$$

特征根为：

$$\lambda_1 = \frac{a + d_1 + \sqrt{(a-d_1)^2 + 4bc}}{2},$$
$$\lambda_2 = \frac{a + d_1 - \sqrt{(a-d_1)^2 + 4bc}}{2} \tag{3}$$

显然，$\lambda_1 \geqslant \lambda_2$。

考虑二维线性自治系统(1)，对于初等奇点 $(0,0)$，当 λ_1 和 λ_2 为相等实数时，奇点为单向结点或星形结点；当 λ_1 和 λ_2 为复数时，轨线为向内或向外盘旋的螺线；当 λ_1 和 λ_2 为异号实数时，轨线以 $y = k_1 x$ 和 $y = k_2 x$ 为渐进线。这些都比较容易作出相图；但当奇点是两向结点时，画相图是教学中的一个难点，本文仅讨论 λ_1 和 λ_2 为同号不等实数即奇点是两向结点的相图。

1 主要结果及证明

当 λ_1 和 λ_2 为同号不等实数时，$(a-d_1)^2 + 4bc > 0$，$\lambda_1 \neq \lambda_2$，由式(3) $\lambda_1 > \lambda_2$，这时奇点是两向结点。分三种情见讨论。

1) $b(\lambda - a) \neq 0$，设矩阵 A 的特征值 λ_1 和 λ_2 对应的特征向量分别设为 ξ_1，ξ_2，取

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\lambda_1 - a} \\ \dfrac{1}{b} \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\lambda_2 - a} \\ \dfrac{1}{b} \end{pmatrix} \tag{4}$$

收稿日期：2021－02－22
基金项目：湖北工程学院教学改革研究项目(2020A20)
作者简介：樊自安(1972－)，男，湖北广水人，湖北工程学院数学与统计学院副教授，硕士。

方程组(1)的通解为：

$$X(t)=\begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\end{pmatrix}=C_1e^{\lambda_1 t}\xi_1+C_2e^{\lambda_2 t}\xi_2,\quad X'(t)=C_1\lambda_1e^{\lambda_1 t}\xi_1+C_2\lambda_2e^{\lambda_2 t}\xi_2。$$

由 $\lambda_1>\lambda_2$ 得轨线 $X(t)$ 的单位切向量 $X'(t)/\|X'(t)\|$ 适合：

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{X'(t)}{\|X'(t)\|}=\pm\frac{\xi_1}{\|\xi_1\|},\quad \lim_{t\to-\infty}\frac{X'(t)}{\|X'(t)\|}=\pm\frac{\xi_2}{\|\xi_2\|}。$$

即当 $t\to+\infty$，轨线 $X(t)$ 的切线趋于平行于向量 ξ_1，当 $t\to-\infty$，轨线 $X(t)$ 的切线趋于平行于向量 ξ_2。

下面我们将证明向量 ξ_1、ξ_2 的斜率为 k_1,k_2，其中 k_1,k_2 这样解出：

$$k=\frac{dy}{dx}=\frac{cx+d_1y}{ax+by}=\frac{c+d_1\dfrac{y}{x}}{a+b\dfrac{y}{x}}=\frac{c+d_1k}{a+bk}$$

即：

$$bk^2+(a-d_1)k-c=0 \tag{5}$$

$$k_1=\frac{d_1-a+\sqrt{(a-d_1)^2+4bc}}{2b},\quad k_2=\frac{d_1-a-\sqrt{(a-d_1)^2+4bc}}{2b},\quad k_1>k_2 \tag{6}$$

由式(3)和式(4)得向量 ξ_1 的斜率：

$$k_{11}=\frac{\dfrac{1}{b}}{\dfrac{1}{\lambda_1-a}}=\frac{\lambda_1-a}{b}=\frac{d_1-a+\sqrt{(a-d_1)^2+4bc}}{2b}=k_1,$$

向量 ξ_2 的斜率：

$$k_{12}=\frac{\dfrac{1}{b}}{\dfrac{1}{\lambda_2-a}}=\frac{\lambda_2-a}{b}=\frac{d_1-a-\sqrt{(a-d_1)^2+4bc}}{2b}=k_2,$$

轨线 $X(t)$ 逐渐趋向于 $(0,0)$ 或远离 $(0,0)$，直线 $y=k_1x$，$y=k_2x$ 都经过原点 $(0,0)$，因此 $t\to+\infty$，轨线 $X(t)$ 的切线趋于 $y=k_1x$，当 $t\to-\infty$，轨线 $X(t)$ 的切线趋于 $y=k_2x$。

2) $b=0$，由式(3)知 $\lambda_1=a$，$\lambda_2=d_1$，不妨设 $a>d_1$，$\lambda_1>\lambda_2$。

设矩阵 A 的特征值 λ_1 和 λ_2 对应的特征向量分别设为 ξ_1,ξ_2，则由 $(A-\lambda E)x=0$，可取

$$\xi_1=\begin{pmatrix}1\\ \dfrac{c}{a-d_1}\end{pmatrix},\quad \xi_2=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix} \tag{7}$$

由于 $\lambda_1>\lambda_2$，由第一种情况的讨论可知，当 $t\to+\infty$，轨线 $X(t)$ 的切线趋于平行于向量 ξ_1，

当 $t\to-\infty$，轨线 $X(t)$ 的切线趋于平行于向量 ξ_2。由式(7)得 ξ_1 的斜率 $k_{11}=\dfrac{c}{a-d_1}$，向量 ξ_2 的斜率 $k_{12}=\infty$，而由式(5)解出 $k_1=\dfrac{c}{a-d_1}$，若补充 $k_2=\infty$ 则 $k_{11}=k_1$，$k_{12}=k_2=\infty$ 仍然成立，因此式(6)仍成立。

3) $\lambda=a$，由式(2)知 $bc=0$，这时 $b\neq0$，$c=0$；若 $b=0$ 第二种情况已讨论。由式(3)知 $\lambda_1=a$，$\lambda_2=d_1$，不妨设 $a>d_1$，$\lambda_1>\lambda_2$。

设矩阵 A 的特征值 λ_1 和 λ_2 对应的特征向量分别设为 ξ_1,ξ_2，则由 $(A-\lambda E)x=0$，可取

$$\xi_1=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix},\quad \xi_2=\begin{pmatrix}\dfrac{b}{d_1-a}\\ 1\end{pmatrix} \tag{8}$$

由于 $\lambda_1>\lambda_2$，由第一种情况的讨论知当 $t\to+\infty$，轨线 $X(t)$ 的切线趋于平行于向量 ξ_1，

当 $t\to-\infty$ 时，轨线 $X(t)$ 的切线趋于平行于向量 ξ_2，由式(8)得 ξ_1 的斜率 $k_{11}=0$，向量 ξ_2 的斜率：$k_{12}=(d_1-a)/b$，而由式(6)解出 $k_1=0$，$k_2=(d_1-a)/b$，则 $k_{11}=k_1$，$k_{12}=k_2$ 仍然成立，因此式(6)仍成立。

因此我们得到下面的定理：

定理 1　当二维线性自治系统(1)的系数矩阵 A 的特征根 λ_1,λ_2 为同号不等实数时，系统(1)的轨线与直线 $y=k_1x$，$y=k_2x$ 的其中一条切于原点 $(0,0)$，其中 k_1,k_2 由式(6)给出（当只解出一条直线斜率 k_1 时，另一条直线为 $x=0$）。

轨线究竟与哪一条直线相切呢？

由式(6)知，$k_1>k_2$，$t\to+\infty$，轨线 $X(t)$ 的切线趋于 $y=k_1x$，这说明，当 $t\to+\infty$，轨线 $X(t)$ 的切线的斜率在逐渐增大，在 $y=k_1x$ 与 $y=k_2x$ 之间，轨线上的点的二阶导数大于 0，这说明在 $y=k_1x$ 与 $y=k_2x$ 之间，轨线是向下凹的。根据这个性质，我们画出第一或第二象限内系统的相图（这里没有画箭头的方向，箭头的方向不影响相图的上述性质），如图 1 和图 2 所示。

从图 1 和图 2 可以看出，在 $y=k_1x$ 与 $y=k_2x$ 之间，在第一象限内，轨线 $X(t)$ 与 $y=k_2x$ 相切或在第二象限内，轨线 $X(t)$ 与 $y=k_1x$ 相

切。因此我们得到下面的定理：

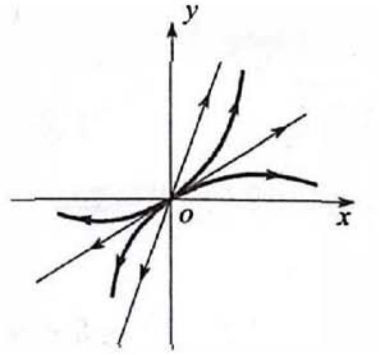

图 1　$k_1 > k_2 > 0$

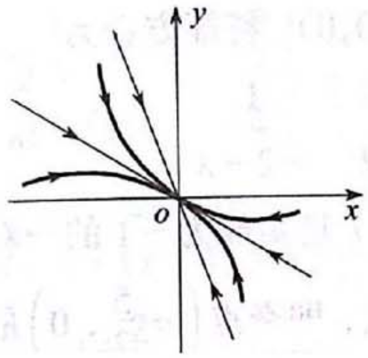

图 2　$k_2 < k_1 < 0$

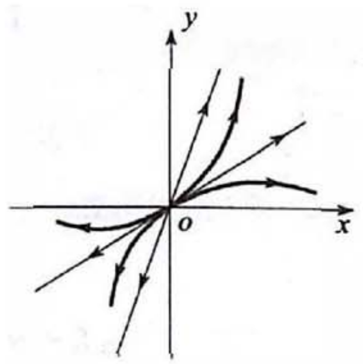

图 3　$k_1 = 3, k_2 = 1$

定理 2　当二维线性自治系统(1)的系数矩阵 A 的特征根 λ_1, λ_2 为同号不等实数时，在 $y = k_1 x$ 与 $y = k_2 x$ 之间，在第一象限内，系统(1)的轨线与 $y = k_2 x$ 相切或在第二象限内，系统的轨线与 $y = k_1 x$ 相切。其中 $k_1 > k_2$，k_1, k_2 由式(6)给出(当只解出一条直线斜率 k_1 时，另一条直线为 $x = 0$)。

2　例子说明

例　确定系统

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -4x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = -3x \end{cases}$$

的奇点类型，并作出相图。

解　(0,0) 是唯一奇点，特征方程 $\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$，特征根 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -3$ 是同号相异实根，奇点 (0,0) 是稳定结点。由

$$k = \frac{dy}{dx} = \frac{-3x}{-4x + y} = \frac{-3}{-4 + k}$$

解出 $k_1 = 3, k_2 = 1$，$k_1 > k_2$，两条渐进线方程 $y = 3x, y = x$，由定理 2，在第一象限内，系统的轨线与 $y = x$ 相切，如图 3 所示。

[参　考　文　献]

[1]　丁同仁，李承治．常微分方程教程[M]．2 版．北京：高等教育出版社，2004．

[2]　王高雄，周之铭，朱思铭，等．常微分方程[M]．3 版．北京：高等教育出版社，2006．

[3]　金福临，阮炯，黄振勋．应用常微分方程[M]．上海：复旦大学出版社，1991．

[4]　庄万．常微分方程习题解[M]．济南：山东科学技术出版社，2004．

[5]　马知恩，周义仓．常微分方程定性与稳定性方法[M]．北京：科学出版社，2001．

[6]　王文俩．从极坐标出发研究平面线性自治系统的相图[J]．云南师范大学学报(自然科学版)，1984(1)：33－41．

[7]　杨小京．平面齐次多项式系统的相图及平衡点的稳定性[J]．清华大学学报(自然科学版)，1997(12)：3－7．

[8]　洪晓春．一类二次微分系统的相图[J]．贵州师范大学学报(自然科学版)，2004(2)：56－57．

[9]　洪晓春，谢绍龙．一类三次 Hamilton 系统的相图[J]．西南民族大学学报(自然科学版)，2004(2)：127－130．

[10]　高静，刘娟．一类三次多项式微分系统的相图[J]．湖北大学学报(自然科学版)，2015，37(2)：185－190．

(责任编辑：熊文涛)