

利用波动图进行驻波的位相和能量特征分析

吴波英¹, 王军延^{1*}, 付伯桥², 彭晓星³, 陈 杰⁴

(1. 湖北工程学院 物理与电子信息工程学院, 湖北 孝感 432000; 2. 湖北工程学院 化学与材料科学学院, 湖北 孝感 432000; 3. 湖北工程学院 新技术学院, 湖北 孝感 432000; 4. 湖北汽车工业学院 理学院, 湖北 十堰 442002)

摘 要:对驻波的分析 and 认识是学生在物理学习中一个重要而颇具困难性的问题, 虽然在教法上对此多有不同侧面的探究, 但仍不能在课堂教学中很好地让学生理解和接受。本文利用驻波表达式的振幅因子和简谐振动因子相乘的方法绘制出不同时刻的驻波波动图, 并以此为基础分析驻波的位相和能量特征。这种方法不仅物理概念清晰、物理图景清楚, 而且操作简单, 学生容易掌握, 对理解驻波的特征大有帮助。

关键词:驻波; 波动图; 振幅因子; 简谐振动因子; 位相和能量特征

中图分类号:G642.0 **文献标志码:**A **文章编号:**2095-4824(2021)03-0036-04

波动图是将某一时刻各点的振动情况定格在一张图形中, 因此有人形象地将它称之为波的“照片”。利用波动图, 我们可以直接判断质元的振动情况, 也可以判断波传播引起质元的相对形变量的大小, 这对于分析波的位相和能量特征十分方便, 也同样适用驻波的情形。在教学中, 笔者发现学生从驻波波动图分析波的位相和能量特征可能并不困难, 最大的困难在于学生是否能自己绘制驻波波动图。

由于波的叠加实质是振动的叠加, 因此教材一般采用在同一幅图上同时绘制相向传播的两列相干波的波动图, 然后将两波在同一点的振动位移相加得到驻波的波动图^[1]。杨庆怡等^[2]提出一种利用振动旋转矢量和波动旋转矢量来描绘驻波波形的方法。该方法首先利用振动旋转矢量 A_t 确定驻波在时刻 t 的波腹, 然后以波腹为长度的波动旋转矢量 A_x 作出这一时刻驻波的波形。王明美等^[3]用“几何画板”绘制驻波的波动图。其中第一种方法^[1]常用的教学方法, 但是学生绘制一个行波波动图尚且困难, 在一张图上同时绘制两个(相向传播)的行波波动图就更不容易了; 第二

种方法^[2]确实具有一定的操作性, 然而, 学生理解这种方法也许有一定的困难, 因此他们并不能熟练掌握这种方法; 第三种方法^[3]需要学生掌握几何画板软件, 课堂教学中这显然不太现实。本文采用驻波表达式的振幅因子与简谐振动因子相乘的方法画出不同时刻的驻波波动图, 笔者在教学过程中发现学生很容易掌握这种方法, 并对他们理解驻波的位相和能量特征也有一定的帮助。

1 驻波表达式

在教材中, 有两相干波分别沿 x 轴的正、负方向传播, 假设两波在原点的振动表达式相同, 即:

$$y_0 = A \cos \omega t \quad (1)$$

则沿 x 轴的正负方向传播的两相干波为

$$y_{1,2} = A \cos \omega(t \mp \frac{x}{u}) = A \cos 2\pi(\nu t \mp \frac{x}{\lambda}) \quad (2)$$

式(2)说明任意点处存在两个振动, 由振动的叠加原理, 任一点处的振动为

$$y = y_1 + y_2 = 2A \cos 2\pi \frac{x}{\lambda} \cos \omega t \quad (3)$$

式(3)即为驻波表达式, 它是两项之积, 其中

收稿日期: 2021-02-25

基金项目: 湖北省教育厅科研项目(B2016085); 湖北工程学院教学研究项目(2019034)

作者简介: 吴波英(1971-), 女, 湖北孝感人, 湖北工程学院物理与电子信息工程学院讲师。

王军延(1978-), 男, 湖北随州人, 湖北工程学院物理与电子信息工程学院讲师, 本文通信作者。

第一项 $2A\cos 2\pi\frac{x}{\lambda}$ 是振幅因子, 它只与空间坐标 x 有关, 与 t 无关, 即各点的振幅都不随时间变化, 但沿 x 轴作正弦周期性分布, 并且波腹处的振幅为 $2A$ (最大值), 波节振幅处为 0 (最小值)。当 x 从 0 到 λ , 振幅因子中的余弦函数就经历了一个周期, 在它的一个完整的周期图形里, 如图 1 中 (i) 所示, 有 2 个波腹, 3 个波节, 从而可以轻松得到相邻波腹和相邻波节的间距都是 $\lambda/2$ 。第二项 $\cos \omega t$ 是简谐振动因子, 表明各点都作同频率的振动, 两项相乘表明各点都作同频率的振动, 只是振幅不同而已。

2 绘制驻波在不同时刻的波动图

驻波表达式 (3) 可视为振幅因子与简谐振动因子两项之积, 而 t 时刻的简谐振动因子对所有质点都相同, 是 0 和 1 之间的一个“数字”, 因此可以先画出振幅因子的图像, 即振幅与坐标的关系, 再与这个“数字”相乘得到某时刻 t 时各点的振动位移, 即驻波某时刻 t 的波动图。

振幅与坐标的关系如图 1 中 (i) 所示。由于假设两波在原点的振动方程相同, 因此原点就是干涉加强的点, 即原点处为波腹。从图 1 中 (i) 可以清楚地判断出波腹 (点 O 和与 B 、 C 两点的中点) 与波节的位置 (点 A 、 B 、 C)。值得注意的是, 这里曲线的起伏说明各点的振幅有大有小, 但与行波波动图曲线起伏的意义不一样。行波中各点作同频率同振幅的简谐振动, 行波波动图曲线的起

伏表明同一时刻各点的振动位相或振动位移不同。

1) 令 $t = 0$, 第二项正好等于 1 , 两项相乘的结果还是等于第一项, 因此该时刻的波动图如图 1 中 (ii) 所示, 这与图 1 中 (i) 完全相同。说明该时刻各点都处于各自的振幅处, 即各点同时运动到各自正或负的最大位移处。由于各点作同频率的简谐振动, 由振动的知识可知, 当质点运动到最大位移处时, 下一刻将向平衡位置运动, 因此下一时刻各点均向各自的平衡位置运动。

2) 令 $t = T/8$, 第二项等于 $\sqrt{2}/2$, 与第一项相乘的结果是该时刻各点的振动位移均为振幅的 $\sqrt{2}/2$ 倍, 即各点同一时刻均运动到各自振幅的 $\sqrt{2}/2$ 处, 运动方向指向平衡位置, 如图 1 中 (iii) 所示。

3) 令 $t = T/4$, 第二项等于 0 , 与第一项相乘的结果是该时刻各点的振动位移均为 0 , 说明各点同一时刻均运动到各自的平衡位置, 此时的波动图是一条位于 x 轴的直线, 如图 1 中 (iv) 所示。由于各点做同频率的简谐振动, 由振动的知识可知, 当质点运动到平衡位置时质点的速度最大, 由于惯性下一刻各点将继续按原运动方向运动。因此, 可以预测下一时刻的波动图可能的形式。

然后令 $t = 3T/8$, $t = T/2$, $t = 5T/8$, $t = 6T/8$, $t = 7T/8$, 采用同样的方法, 可以分别画出对应时刻的波动图。当 $t = T$ 时, 各质点完成一次全振动, 都回到 $t = 0$ 的位置, 因此与 $t = 0$ 的波动图完全相同。

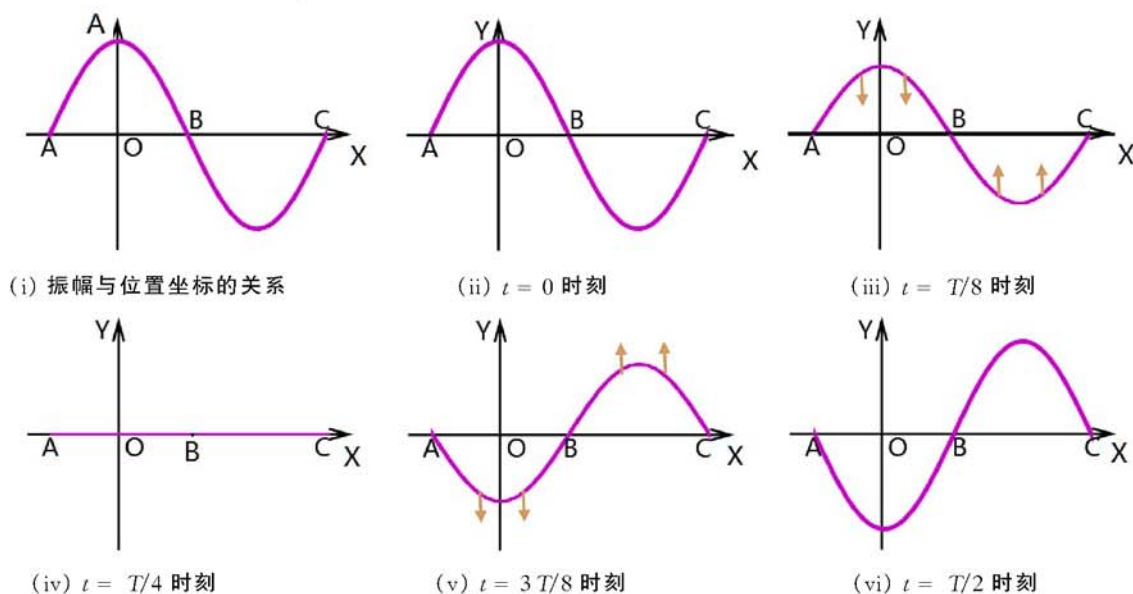


图 1 驻波在不同时刻的波动图

从图 1 可以看出, 驻波的波形曲线是一些高矮不同的余弦曲线, 即不同时刻的波形并不相同。

然而,我们在一根两端固定的、张紧的弦线上观察到的驻波是波形不随时间变化的波动^[4],这是由于视觉暂留才给人产生的错觉,因此称为“驻波”。

3 驻波的位相特征分析

由上面的分析可知,驻波中各点作振动范围不同的同频率简谐振动,只有波节是始终静止的点,可以看到这些始终静止的点将驻波分成了一段一段的,因此驻波可视为分段振动。相邻波节 A、B 之间各点在 $t = 0$ 时刻同时到达各自正的最大位移处,而在 $t = T/4$ 时刻同时到达各自的平衡位置,因此这些点的振动是同步的,即振动同相。

波节 B 两侧的 A-B 与 B-C 之间各点,在 $t = 0$ 时刻分别达到它们各自正、负的最大位移处;在 $t = T/4$ 时刻它们同时到达各自的平衡位置,但是 A-B 之间各点向负方向运动,而 B-C 之间各点向正方向运动,因此可以判断波节 B 两侧的这些点的振动反相。

从驻波表达式(3)也可以得到该结论。驻波表达式的振幅因子是有正有负的,如从图 1 中(i)所示,可以看出波节两侧各点的振幅异号,因此波节两侧各点的振动表达式实际上相差一个负号,这个“负号”即表明波节两侧各点振动反相。而相邻波节之间各点的振幅同号,即表明相邻波节之间各点振动同相。

4 驻波的能量特征分析

波的能量包含两部分:一部分是各质元由于振动而具有的振动动能,振动动能与速度的平方成正比。由于各点作简谐振动,振动速度与振动位移有关,如振动位移为 0 时,振动速度是最大的,其振动动能必然最大;如振动位移为 $\pm A$ 时,振动速度为 0,其振动动能必然为 0。波动图记录了同一时刻各质元的振动位移,因此通过它可以直观地看出各质元的振动动能大小。

波在介质中传播会引起介质发生弹性形变,横波引起介质的剪切形变,表现为凸起和凹陷,如绳波;纵波则引起介质的长变,如纵波在一根弹簧圈上传播时,看到的是弹簧圈的稠密与稀疏。虽然这两种波的外观表现截然不同,但是它们的波动图完全一样,都是一条余弦或正弦曲线。质元的弹性形变的相对形变量均为 $\frac{dy}{dx}$,对应着波形

曲线上各点的切线斜率,而形变势能与相对形变量的平方成正比。因此由波动图可以直观地看出各质元的形变势能的大小。

驻波虽然不是(行)波,但由于它也包含所有质元的振动,因此各质元必然有振动动能;由于它的波动图和行波一样也是余弦或正弦曲线,因此也会引起介质的弹性形变,因此各质元也必然有形变势能。

首先分析波腹和波节处的能量特征。从不同时刻的波动图可以看到波腹始终处于余弦曲线的极值处,即切线斜率始终为 0,因此波腹处的形变势能时时为 0;由于波腹处作振动范围最大的简谐振动,因此在波腹处总是具有振动动能,并且比非波腹处的质元同时刻的振动动能大。而波节是始终静止的点,因此波节处的振动动能时时为 0;除了波动图为直线时(如图 1 中(iv)所示),其他时候总处于余弦曲线斜率最大的位置,因此波节总具有形变势能,并且比非波节处同时刻的形变势能大。其余各质元均既有振动动能又有形变势能。

另外,波动图为直线时(如图 1 中(iv)所示),此时各处的相对形变量均为 0,说明此时各处的形变势能均为 0;但此时由于各质点均处于平衡位置,各质点除波节外均具有振动动能,即此时能量以动能形式存在。质点处于平衡位置时速度为 ωA ,驻波中各点的角频率均为 ω ,而波腹处的振幅最大,因此其振动速度最大,振动动能必然最大。此时能量(动能)主要集结在波腹处。在 $t = 0$ (如图 1 中(ii)所示)和 $t = T/2$ (如图 1 中(vi)所示)时各质点均到达各自的最大位移处,此时各质点的动能均为 0,但此时由于除波腹外各处都存在弹性形变,因此各处存在形变势能,其中波节处的相对形变量最大,因此波节处的形变势能最大,即此时能量以势能形式存在,并主要集结在波节处。

从上面的分析可以看出波腹处的形变势能总为 0,其动能随运动不断变化;波节处的动能总为 0,其形变势能随运动不断变化。并且当波腹动能最大时,波节处形变势能为 0;波腹动能为 0 时,波节处形变势能最大。

文献[5]通过两相向传播的波的能量密度相减得到驻波的能量密度,发现波节、波腹位置上的能量密度无论什么时刻均为 0,但除波节、波腹外,其他各质元的能量密度可以不为 0,说明能量

在波节、波腹之间的各质元上流动。换言之,由于存在波节(始终静止的点),因此驻波的波形曲线并未像行波那样移动,因此能量也并未像行波那样定向传播,能量只是在波腹和波节处往返集结。

5 结语

1)驻波表达式(3)中的简谐振动因子是 $0-1$ 之间的一个“数字”,因此先画出振幅因子的图像,再与这个“数字”相乘,就可以很容易地画出不同时刻的驻波波动图。

2)驻波的位相特征:相邻波节之间各点振动同相,而波节两侧的各点振动反相。

3)驻波的能量特征:当波动图为直线时,此时各质元除波节外只有动能,形变势能均为 0,并且波腹处的动能最大;在 $t=0$ 和 $t=T/2$ 时刻,各质元除波腹外只有形变势能,动能均为 0,并且波节处的形变势能最大。其他时刻除波腹和波节外

的各质元既具有动能也具有势能,动能和势能随着运动不断变化。驻波的能量没有向外传播,但在波腹和波节之间各点流动。

[参 考 文 献]

- [1] 赵凯华,罗蔚茵.新概念物理教程:力学[M]. 1版. 北京:高等教育出版社,1995.
- [2] 杨庆怡,刘奕新,郭进.用振动旋转矢量和波动旋转矢量描述驻波波形[J].物理与工程,2009,19(3): 57-58.
- [3] 王明美,訾振发,章韦芳,等.“几何画板”绘制驻波形成的动态关系图示[J].广西物理 2013,34(4):50-51.
- [4] 桑建平.新编大学物理(上)[M].武汉:武汉大学出版社,2012.
- [5] 郭建军.关于驻波能量的分析[J].大学物理, 2005,24(5):23-25.

An Analysis of Standing Wave's Phase and Energy Characteristics by Means of Wave Patterns

Wu Boying¹, Wang Junyan^{1*}, Fu Boqiao², Peng Xiaoxing³, Chen Jie⁴

(1. School of Physics and Electronic-information Engineering, Hubei Engineering University, Xiaogan, Hubei 432000, China; 2. School of Chemistry and Material Science, Hubei Engineering University, Xiaogan, Hubei 432000, China; 3. College of Technology, Hubei Engineering University, Xiaogan, Hubei 432000, China; 4. School of Science, Hubei University of Automotive Technology, Shiyan, Hubei 442002, China)

Abstract: The analysis and perception of standing waves is important and quite difficult for students in physics learning. Students fail to fully perceive standing waves, though many different teaching methods are tried in classroom teaching. In this paper, the method of multiplying the amplitude factor and the harmonic vibration factor of the standing wave expression is used to draw the standing wave diagrams at different time, based on which the phase and energy characteristics of the standing waves are analyzed. Not only are the physical concept and the physical picture clear, the method is also easy to master and easy to operate, which turns out to be conducive for students to well perceive the characteristics of standing waves.

Key Words: standing wave; wave patterns; amplitude factor; harmonic vibration factor; phase and energy characteristics

(责任编辑:熊文涛)