均匀拟阵四阶圈图的哈密顿性

吴亚平,冯丽珠
(江汉大学 人工智能学院,湖北 武汉 430056)

摘要:研究了均匀拟阵四阶圈图在某些条件下的哈密顿性。证明了当 $m+2\leqslant n\leqslant 2m-2$ 时,$U_{m,n}$ 的四阶圈图是哈密顿连通的,并且是一致哈密顿的;当 $n=2m-1$ 时,$U_{m,2m-1}$ 的四阶圈图是哈密顿连通的,其中 $m,n\in Z^{+}$,$m\geqslant 4$。

关键词:均匀拟阵;拟阵的圈图;哈密顿连通;一致哈密顿

中图分类号:O157.5 **文献标志码**:A **文章编号**:2095-4824(2021)06-0102-04

Whitney[1]在 1935 年和 Rado[2]在 1942 年分别提出拟阵的概念。后来,Tutte[3]扩展了这一概念。二十世纪拟阵论得到了很大的发展,成为一个重要的数学分支。拟阵论成为了组合优化和算法设计强有力的工具,它主要研究基图、超平面、和图、连通性、格结构和模性等内容。李萍和刘桂真[4]给出了拟阵圈图的概念,并得到了关于拟阵圈图的连通度、圈和路结论。关于拟阵圈图的其他性质研究参看文献[5-7]。刘彬等[8]研究在特定条件下均匀拟阵二阶圈图的哈密顿性。吴亚平等[9]研究均匀拟阵三阶圈图的哈密顿性。本文进一步考虑均匀拟阵四阶圈图的哈密顿性问题。根据均匀拟阵 k 阶圈图定义可知,其 k 阶圈图是其相应 $l(l<k)$ 阶圈图的子图,因此若均匀拟阵 4 阶圈图是哈密顿的,则其 2 阶和 3 阶圈图也都是哈密顿的,这样我们也推广了文献[8-9]的结论。

设 E 是一个有限集合,$I\subseteq 2^{E}$ 是 E 中子集构成的集合,一个拟阵 M 是一个有序对 (E,I),且满足 $(I_1\sim I_3)$:

(I_1) $\varnothing\in I$。

(I_2) 如果 $I\in I$,且 $I'\subseteq I$,则 $I'\in I$。

(I_3) 如果 $I_1,I_2\in I$ 且 $|I_1|<|I_2|$,则一定存在 $e\in I_2-I_1$ 使得 $I_1\cup e\in I$。

称集合 I 中的元素为拟阵 M 的独立集。令 $M=(E,I)$ 是一个拟阵,如果子集 $X\notin I$,则称 X 为拟阵 M 的一个相关集。拟阵 M 中一个极小的相关集称为 M 的一个极小圈,用 $C(M)$ 表示拟阵 M 中所有极小圈构成的集合,不产生混淆的情况下记为 C。本文中出现但未介绍的相关拟阵术语参看文献[10],图论术语参考文献[11]。

设 $n\geqslant m$, $n,m\in Z^{+}$,有限集合 E, $|E|=n$。令 $I=\{X\subseteq E:|X|\leqslant m\}$,则 (E,I) 是均匀拟阵,记作 $U_{m,n}$。均匀拟阵 $U_{m,n}$ 的 k 阶圈图记为 $C_k(U_{m,n})$,其顶点集为 C,边集为 $\{CC'\mid C,C'\in C,|C\cap C'|\geqslant k\}$。这里 C 和 C' 既代表 $C_k(U_{m,n})$ 的顶点,也代表拟阵 $U_{m,n}$ 的圈。

$U_{4,2}$ $(U_{5,2})$ 的 2 阶圈图 $C_2(U_{4,2})$ $(C_2(U_{5,2}))$ 见图 1(图 2),$U_{5,3}$ 的 3 阶圈图 $C_3(U_{5,3})$ 见图 3。

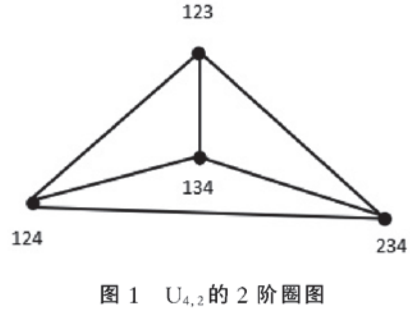

图 1 $U_{4,2}$ 的 2 阶圈图

收稿日期:2021-09-05
基金项目:江汉大学科研项目(2021yb056)
作者简介:吴亚平(1979-),女,湖北大冶人,江汉大学人工智能学院副教授,博士。
冯丽珠(1971-),女,湖北大冶人,江汉大学人工智能学院副教授,硕士。

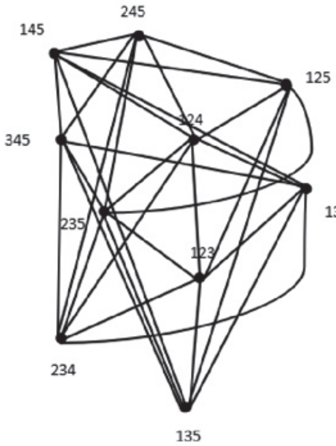

图 2　$U_{5,2}$ 的 2 阶圈图

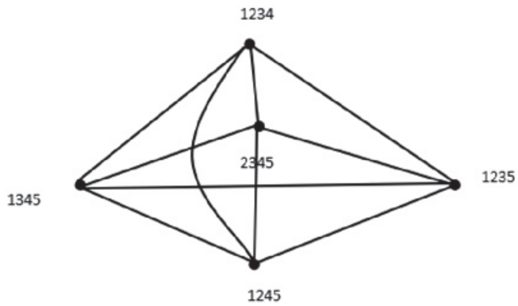

图 3　$U_{5,3}$ 的 3 阶圈图

1　预备知识

引理 1[11]　令 G 是一个 $n-$ 阶简单图，$n\geqslant 3$。如果 G 中每个顶点 v 都满足 $d(v)\geqslant \frac{n+1}{2}$，那么 G 是哈密顿连通的。

引理 2　$U_{4,n}$ 的四阶圈图 $C_4(U_{4,n})$ 共有 $\binom{n}{5}$ 个顶点，并且是 $\binom{5}{4}\binom{n-5}{1}-$ 正则图。（$n\geqslant 6$，且 n 为正整数）

证明　令 $E=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，$C_4(U_{4,n})=\{X\subseteq E:|X|=5\}$，根据 $C_4(U_{4,n})$ 定义，它的一个顶点从集合 E 中取 5 元素子集，所以 $C_4(U_{4,n})$ 共有 $\binom{n}{5}$ 个顶点。任取 $C_4(U_{4,n})$ 的一个顶点 $A=\{x_i,x_j,x_k,x_s,x_t\}$，其中 $i\neq j\neq k\neq s\neq t$ 且 $i,j,k,s,t\in\{1,2,\cdots,n\}$。根据 $C_4(U_{4,n})$ 定义，$A=\{x_i,x_j,x_k,x_s,x_t\}$ 相邻顶点，与 A 有且仅有 4 个相同元素，剩下的一个元素从 $E-\{x_i,x_j,x_k,x_s,x_t\}$ 中选择，故与 A 相邻的顶点有 $\binom{5}{4}\binom{n-5}{1}$ 个。又由 $\{x_i,x_j,x_k,x_s,x_t\}$ 的任意性知，$C_4(U_{4,n})$ 是 $\binom{5}{4}\binom{n-5}{1}-$ 正则图。

引理 3　$U_{5,n}$ 的四阶圈图 $C_4(U_{5,n})$ 共有 $\binom{n}{6}$ 个顶点，并且是 $\binom{6}{4}\binom{n-6}{2}+\binom{6}{5}\binom{n-6}{1}-$ 正则图。（$n\geqslant 7$，且 n 为正整数）

证明　令 $E=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，$C_4(U_{5,n})=\{X\subseteq E:|X|=6\}$，根据 $C_4(U_{5,n})$ 定义，它的一个顶点从集合 E 中取 6 元素子集，所以 $C_4(U_{5,n})$ 共有 $\binom{n}{6}$ 个顶点。采用与引理 2 类似的证明，任取 $C_4(U_{5,n})$ 的一个顶点 $A'=\{x_i,x_j,x_k,x_l,x_s,x_t\}$，其中 $i\neq j\neq k\neq l\neq s\neq t$ 且 $i,j,k,l,s,t\in\{1,2,\cdots,n\}$。

下面我们确定 $d(A')$。根据 $C_4(U_{5,n})$ 定义，A' 相邻顶点，与 A' 有 4 个或 5 个相同元素，剩下的元素从 $E-\{x_i,x_j,x_k,x_l,x_s,x_t\}$ 中选择。与 A' 只有 4 个元素相同的邻点数 $\binom{6}{4}\binom{n-6}{2}$；与 A' 只有 5 个元素相同的邻点数 $\binom{6}{5}\binom{n-6}{1}$。所以 $d(A')=\binom{6}{4}\binom{n-6}{2}+\binom{6}{5}\binom{n-6}{1}$。又由顶点 A' 的任意性知，$C_4(U_{5,n})$ 是 $\binom{6}{4}\binom{n-6}{2}+\binom{6}{5}\binom{n-6}{1}-$ 正则。

引理 4　$U_{m,n}$ 的四阶圈图共有 $\binom{n}{m+1}$ 个顶点，并且是 $\binom{m+1}{4}\binom{n-m-1}{m-3}+\binom{m+1}{5}\binom{n-m-1}{m-2}+\cdots+\binom{m+1}{m}\binom{n-m-1}{1}-$ 正则，其中 m,n 都为正整数，且 $m\geqslant 4$，$n\geqslant m+2$。

证明　令 $C_4(U_{m,n})=\{X\subseteq E:|X|=m+1\}$。由定义知 $U_{m,n}$ 的四阶圈图 $C_4(U_{m,n})$ 共有 $\binom{n}{m+1}$ 个顶点。下面我们证 $U_{m,n}$ 的四阶圈图是 $\binom{m+1}{4}\binom{n-m-1}{m-3}+\binom{m+1}{5}\binom{n-m-1}{m-2}+\cdots$

$+\binom{m+1}{m}\binom{n-m-1}{1}$ - 正则图。

同引理 3 证明，任取 $U_{m,n}$ 的四阶圈图的一个顶点 $B=\{x_{i_1},x_{i_2},\cdots,x_{i_{m+1}}\}$，其中 $i_j\neq i_k$, $j\neq k$, $i_j\in\{1,2,\cdots,n\}$, $j=1,2,\cdots,m+1$。下面我们求与 B 相邻的顶点的个数。如果 B 的邻点与它恰好有 k, $4\leqslant k\leqslant m$ 个元素相同，则满足这个条件 B 的邻点个数 $\binom{m+1}{k}\binom{n-m-1}{m+1-k}$。所以 B 的邻点个数 $\sum_{k=4}^{m}\binom{m+1}{k}\binom{n-m-1}{m+1-k}=\binom{m+1}{4}\binom{n-m-1}{m-3}+\cdots+\binom{m+1}{m}\binom{n-m-1}{1}$，

由于 B 的任意性，可知 $U_{m,n}$ 的四阶圈图是 $\binom{m+1}{4}\binom{n-m-1}{m-3}+\cdots+\binom{m+1}{m}\binom{n-m-1}{1}$ - 正则图。

引理 5[8] 完全图 K_n 是哈密顿连通的，而且是一致哈密顿的。

2 主要结论

在证明定理 1 和定理 2 过程中，将用到下面这个组合恒等式。

$$\binom{m+n}{r}=\binom{m}{0}\binom{n}{r}+\binom{m}{1}\binom{n}{r-1}+\cdots+\binom{m}{r}\binom{n}{0}\qquad(*)$$

定理 1 当 $m+2\leqslant n\leqslant 2m-2$，$m\geqslant 4$，$U_{m,n}$ 的四阶圈图是哈密顿连通的，并且是一致哈密顿的。

证明 由引理 4 知，$U_{m,n}$ 四阶圈图顶点数是 $\binom{n}{m+1}$，它是 $\sum_{k=4}^{m}\binom{m+1}{k}\binom{n-m-1}{m+1-k}$ - 正则的。

根据 $(*)$，$\binom{n}{m+1}=\sum_{k=0}^{m}\binom{m+1}{k}\binom{n-m-1}{m+1-k}+\binom{m+1}{m+1}\binom{n-m-1}{0}$

当 $m+2\leqslant n\leqslant 2m-2$，可知 $\binom{n-m-1}{m+1}=\binom{n-m-1}{m}=\binom{n-m-1}{m-1}=\binom{n-m-1}{m-2}=0$，故

$$\sum_{k=0}^{3}\binom{m+1}{k}\binom{n-m-1}{m+1-k}=0,$$

可知

$$\sum_{k=4}^{m}\binom{m+1}{k}\binom{n-m-1}{m+1-k}=\binom{n}{m+1}-1。$$

即当 $m+2\leqslant n\leqslant 2m-2$，$m\geqslant 4$，$U_{m,n}$ 的四阶圈图是完全图。由引理 5 知，$U_{m,n}$ 的四阶圈图是哈密顿连通的，并且是一致哈密顿的。

定理 2 $U_{m,2m-1}$ 的四阶圈图是哈密顿连通的，$m\geqslant 4$。

证明 由引理 4 知，$U_{m,2m-1}$ 四阶圈图顶点数是 $\binom{2m-1}{m+1}$，它是 $\sum_{k=4}^{m}\binom{m+1}{k}\binom{2m-m-2}{m+1-k}$ - 正则的。

首先我们来证明一个引理 6。

引理 6 设 $m\in Z^{+}$，当 $m\geqslant 5$ 时，有 $\binom{2m-1}{m+1}\geqslant 2\binom{m+1}{3}+2$, $m\geqslant 5$。

证明 采用归纳法证明。由于 $\binom{9}{6}=\binom{9}{3}=84>42=2\binom{6}{3}+2$，当 $m=5$ 不等式成立。下面假设当 $m\leqslant k$ 时结论成立。当 $m=k+1$，有 $\binom{2m-1}{m+1}=\binom{2k+1}{k+2}$。根据 Pascal 公式，

$$\binom{2k+1}{k+2}=\binom{2k}{k+2}+\binom{2k}{k+1}$$
$$=\binom{2k-1}{k+2}+\binom{2k-1}{k+1}+\binom{2k-1}{k+1}+\binom{2k-1}{k}$$

根据归纳假设，$\binom{2k-1}{k+1}\geqslant 2\binom{k+1}{3}+2$，则

$$\binom{2k+1}{k+2}\geqslant 2\binom{k+1}{3}+2+2\binom{k+1}{3}+2+\binom{2k-1}{k+2}+\binom{2k-1}{k}$$
$$=2\binom{k+1}{3}+2+2\left\{\binom{k}{3}+\binom{k}{2}\right\}+2+\binom{2k-1}{k+2}+\binom{2k-1}{k}$$

$$= 2\left\{\binom{k+1}{3}+\binom{k+1}{2}\right\}+2\binom{k}{3}-2\binom{k}{1}+\binom{2k-1}{k+2}+\binom{2k-1}{k}+4$$

$$= 2\binom{k+2}{3}+2+2\binom{k-1}{3}+2\binom{k-2}{2}+\binom{2k-1}{k+2}+\binom{2k-1}{k}+2>2\binom{k+2}{3}+2$$

因此引理 6 成立。

根据（*）知，$\binom{2m-1}{m+1}=\sum_{k=0}^{m}\binom{m+1}{k}\binom{m-2}{m+1-k}+\binom{m+1}{m+1}\binom{m-2}{0}=\sum_{k=0}^{m}\binom{m+1}{k}\binom{m-2}{m+1-k}+1$。

由于 $\binom{m-2}{m+1}=\binom{m-2}{m}=\binom{m-2}{m-1}=0$，可知 $\sum_{k=4}^{m}\binom{m+1}{k}\binom{m-2}{m+1-k}=\binom{2m-1}{m+1}-\binom{m+1}{3}-1$。根据引理 6,

$$\binom{2m-1}{m+1}-\binom{m+1}{3}-1\geqslant\frac{1}{2}\binom{2m-1}{m+1}$$，即

$$\sum_{k=4}^{m}\binom{m+1}{k}\binom{m-2}{m+1-k}\geqslant\frac{1}{2}\binom{2m-1}{m+1}$$，

根据引理 1,定理 2 结论成立。

［参考文献］

［1］ WHITEY H. On the abstract properties of linear dependence[J]. American Journal of Mathematics, 1935, 57(3): 509－533.

［2］ RADO R. A theorem on independence relations [J]. The Quarterly Journal of Mathematics, 1942, 131(1): 83－89.

［3］ TUTTE W T. Matriods and graphs[J]. Transactions of the American Mathematical Society, 1959, 90(3): 527－552.

［4］ 李萍. 拟阵圈图的一些性质[D]. 济南：山东大学, 2010.

［5］ HAO F, GUI Z L. Properties of Hamilton cycles of circuit graphs of matroids[J]. Frontiers of Mathematics in China, 2013, 8(4): 801－809.

［6］ LI P, LIU G Z. Hamilton cycles in circuit graphs of matroids[J]. Computers and Mathematics with Applications, 2007, 55(4): 654－659.

［7］ LI P, LIU G Z. Cycles in Circuit Graphs of Matroids[J]. Graphs and Combinatorics, 2007, 23: 4258－431.

［8］ 刘彬, 邓梓健, 杜轻松, 等. 均匀拟阵二阶圈图的哈密顿性[J]. 江汉大学学报（自然科学版）, 2020, 48(5): 36－41.

［9］ 吴亚平, 冯丽珠. 均匀拟阵三阶圈图的哈密顿性[J]. 江汉大学学报（自然科学版）, 2021, 49(1): 5－9.

［10］ 赖虹建. 拟阵论[M]. 北京：高等教育出版社, 2000: 11.

［11］ CHARTRAND G, LESNIAK L, ZHANG P. Graphs & Digraphs[M]. Boca Raton: CRC Press, 2015, 4: 125－153.

Properties of Hamilton of the Fourth Order Circuit Graphs of Uniform Matroid

Wu Yaping, Feng Lizhu

(*School of Artificial intelligence, Jianghan University, Wuhan, Hubei* 430056, *China*)

Abstract: This article mainly studied properties of Hamilton about the fourth order circuit graphs of uniform matroid under certain conditions. It is discovered the fourth order circuit graphs of $U_{m,n}$ is Hamiltonian－connected and uniform Hamilton if $n = m+2, m+3, \cdots, 2m-2$, which m, n are positive integer and $m\geqslant 4$, $n\geqslant m+2$ and the fourth order circuit graphs of $U_{m,2m-1}$ is Hamilton－connected.

Key Words: uniform matroid; circuit graph of matroids; Hamilton－connected; uniformly Hamilton

（责任编辑：熊文涛）