

# 以学为中心的互动探究性教学在“拉格朗日乘数法”教学中的应用

景慧丽, 李应岐

(火箭军工程大学 基础部, 陕西 西安 710025)

**摘要:**探讨了以学为中心的互动探究性教学,即学员在教员的引导下,通过参与教学过程、解决问题等探索活动来获取知识,掌握数学思想方法,培养问题意识和创新能力。在教学实践中,始终遵循和坚持以学为中心的教学原则,突出教学互动,并以“拉格朗日乘数法”的教学为例,说明了以学为中心的互动探究性教学的实施过程。

**关键词:**以学为中心;探究性教学;拉格朗日乘数法

**中图分类号:**O143 **文献标志码:**A **文章编号:**2095-4824(2021)03-0040-04

教育家波利亚说:“学习任何知识的最佳途径都是由自己去发现,因为这种发现,理解最深刻,也最容易掌握其中的内在规律、性质和联系。<sup>[1]</sup>”因此,在教学过程中教员要创造探索、探究情境,让学员主动地去参与到知识的探索发现过程中,要充分发挥学员学习主体的作用。注意到探究性教学是在教员的指导下,学员围绕一定的问题、文本或材料,通过自主参与发现问题、分析问题和解决问题等一系列的探索活动(其中包括思维、情感和动作等方面的活动),来获得知识和技能、发展能力、培养情感体验,它突出学员的主体地位,注重培养学员发现问题的意识和能力,强调学员主动性和创造性的发挥<sup>[2]</sup>。因此,笔者研究和探索了以学为中心的互动探究性教学法,并在军校“高等数学”课程教学中进行了多年实践检验,教学效果不错。该教学模式注重学员问题意识和创新能力的发展,能充分发挥学员学习主体的作用,有效解决了学员缺乏质疑精神和探讨热情、不愿参与到教学活动中、懒于动脑思考的问题。解决了“高等数学”这门理论性强又高度抽象且让学员感觉

“枯燥”、“畏惧”的课程互动内容简单、互动形式单一、互动对象不平等、互动策略不多、互动教学不实、互动效果不好的问题。实现了从注重课本知识传授的“以教为中心”向“科学知识+思想方法+问题意识+创新能力+价值塑造”并重的“以学为中心”的教学理念、教学模式的转变。本文以“拉格朗日乘数法”的教学为例,探讨一下以学为中心的互动探究性教学法的具体实施过程。

## 1 创设情境,引出条件极值的概念,并给出几何解释

一堂课的引入是非常重要的,课堂引入往往直接影响教学效果,好的课堂引入能激发学员的学习兴趣,唤起学员的思维,引燃学员的学习激情<sup>[3]</sup>。考虑到目前“高等数学”课程教材缺少实际应用和军事应用的例子,再结合军校学员身份的特殊性,既是学生更是军人,笔者就以军事应用问题(某部队某基地物资中转站的选址问题)作为本节课的引入,并启发学员将实际问题进行一些合理的简化,同时引导他们用数学语言来描述、解决

收稿日期:2020-09-12

基金项目:陕西省教育厅高等教育教学改革研究项目(19BG038);火箭军工程大学教育教学研究课题(HJJKT2020028);高等学校大学数学教学研究中心教学改革项目(CMC20160405)

作者简介:景慧丽(1983-),女,河南平顶山人,火箭军工程大学基础部副教授,硕士。

该实际问题,进一步概括总结,从而得到条件极值的概念,即当自变量  $(x, y)$  满足条件  $\varphi(x, y) = 0$  时,计算函数  $z = f(x, y)$  的极值问题。这类问题也称为有约束极值问题。

这种引入不但让学员体会到了数学来源于实际生活,而且也让他们感受到了数学的军事应用价值,同时也让他们初步掌握了简单的数学建模方法,培养了他们综合所学数学知识解决实际问题的意识和能力。

为了让学员更深刻地理解条件极值的概念,笔者又利用多媒体软件演示了条件极值的动态图,这种几何辅助分析法不但能直观地揭示条件极值这个概念的本质,而且也丰富了数学教学手段。

接着,笔者首先从概念上强调了条件极值和无条件极值的区别,然后又用具体例子和几何图形相结合的方法对两者进行了解释(具体例子是:对函数  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$  来说,如果对自变量只有定义域的限制,它在点  $(0, 0)$  处取得极小值 0。但是,如果对自变量加上限制条件  $x + y = 1$ ,则  $(0, 0)$  点就不是其极小值点<sup>[4]</sup>。)

在本节以学为中心的互动探究性教学过程中典型例题的选取也是很重要的,例题不但要直观明了,也要为后面由浅入深、由简单到复杂地探索条件极值的解法奠定基础。

条件极值的概念解释清楚后就进入了最重要的环节——条件极值的求解问题。

## 2 由简单到复杂,求解约束条件能显化的例子,得代入法

笔者借助解释条件极值与无条件极值之间区别的例子创设探究情境,设计一系列阶梯问题引导学员进行探索:在约束条件  $x + y = 1$  的限制下,如何求目标函数  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$  的极值呢?约束条件中的  $(x, y)$  与目标函数中的  $(x, y)$  是什么关系?能否从约束条件中解出  $y$ ,然后将  $y$  代入到目标函数中呢?代入后目标函数变成了几元函数?其自变量受什么限制?如何求一元函数的无条件极值呢?函数  $z = \sqrt{x^2 + (1-x)^2}$  和  $g = x^2 + (1-x)^2$  的极值点一样吗?能否转化成求函数  $g(x, y) = x^2 + y^2$  的极小值问题呢?上述方法求解条件极值的关键和核心是什么?等等。在学员探索过程中笔者适时适情适境给予引导、点拨。学员探索完笔者告诉学员他们的求解

方法就是代入法,并让学员通过归纳总结自己的求解过程,概括出利用代入法求解条件极值的一般步骤,并用简洁明了的语言表达出来,因为及时进行总结既是教学的一个重要环节,也是学员学习的一个重要方法,通过总结可以使所获得的知识更加条理化、系统化<sup>[5]</sup>。同时,笔者给出了解的几何解释,并强调了“转化”这个思想在数学学习中的重要作用。至此,所有准备工作完成了,接着笔者带领学员探索“拉格朗日乘数法”的获得过程。

## 3 约束条件逐步复杂化,代入法失效

笔者首先提出问题:目标函数依然是  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,如果约束条件方程是  $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 5$ ,该如何求解呢?代入法可以解决该问题吗?让学员思考、讨论后,笔者又立马提出问题:如果约束条件方程是  $\sin y + e^x - xy^2 = 0$ ,那么代入法还可行吗?所有学员都认为此时代入法是无法解决该问题的,并给出了代入法失效的原因,于是笔者“乘胜追击”,提出问题:一般地,当约束条件  $\varphi(x, y) = 0$  不易显化或者不能显化时该如何求解条件极值呢?预习过的同学都会不假思索地提出用拉格朗日乘数法求解,笔者一方面对学员进行预习这个学习习惯提出表扬,另一方面又提出三个问题让学员思考:拉格朗日乘数法是怎么得到的呢?它的思想是什么呢?它的使用条件又是什么呢?这三个问题几乎没有学员能回答上来,笔者趁机强调通过自己探索获得知识的发现过程比死记现成的知识更快乐、更可贵、更能体会数学的发现美,然后带领学员进行探索。

## 4 借助几何直观辅助分析,获得灵感

笔者发现学员无从下手、毫无头绪,不知道该从哪里入手进行分析,此时笔者及时地进行引导,告诉学员在探索知识的过程中当理论分析陷入困境时,可以运用“数形结合”的思想方法,借助几何图形辅助分析,因为著名数学家华罗庚先生曾说:“数与形,本是相倚依,焉能分作两边飞。数缺形时少知觉,形少数时难入微。数形结合百般好,隔离分家万事非。<sup>[6]</sup>”这种借助学员熟悉的名人的名言的教学方法,不但可以使自己的讲解更具说服力,还可以增加学员的学习兴趣。

接着笔者带领学员利用“数形结合”的方法进行探索,笔者首先给出目标函数  $z = f(x, y)$  的等

值线  $f(x, y) = c$  和约束条件  $\varphi(x, y) = 0$  的曲线  $l$ , 如图 1 所示。

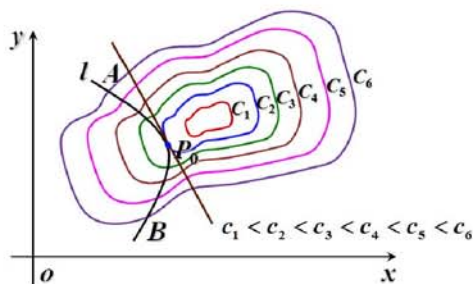


图 1 条件极值的几何特征

然后笔者通过动态演示让学员观察并思考在条件极小值点处约束曲线和等值线有什么关系? 并通过让学员解决一系列阶梯问题, 最终得到结论: 在条件极小值点  $P_0(x_0, y_0)$  处, 等式

$$\frac{f_x(x_0, y_0)}{\varphi_x(x_0, y_0)} = \frac{f_y(x_0, y_0)}{\varphi_y(x_0, y_0)} \quad (1)$$

成立。

得到等式(1)后, 笔者提出两个问题, 让学员思考、讨论: 上述结论是否具有一般性呢? 上述结论是从几何图形上得到的, 那么其在理论上成立吗?

## 5 大胆猜想, 并对猜想进行验证

学员对上述等式是否在理论上成立意见并不一致, 这个属于正常情况, 因为学员数学素养、数学基础不同, 接受新事物的能力也不同, 所以当学员的探索偏离主题或出现错误时, 就需要教员进行及时的指导。此时笔者鼓励学员不妨大胆猜想上述等式在理论上也是成立的, 并且也通过名人名言名事告诉学员合理猜想科学发展史上的重要性, 让学员体会合理猜想的价值。然后笔者告诉学员合理猜想后还需要对猜想进行验证, 验证猜想也是科学探索、获取知识的一个重要环节, 并让学员思考如何验证上述猜想。此时大部分学员都不知道怎么验证, 笔者告诉学员借助已知来研究未知是最常用的数学方法, 启发学员可以利用已学的知识进行验证, 另外, 注意到等式(1)是在极值点处成立的, 因此可以从函数取得极值的必要条件入手进行验证。大部分学员都会想到用已知的“代入法”进行验证, 但是使用代入法时要求约束条件  $\varphi(x, y) = 0$  必须能显化, 但是这里的前提条件是约束条件  $\varphi(x, y) = 0$  不易显化或者不能显化, 这就构成了矛盾, 该如何化解矛盾呢? 学员思考、讨论后, 笔者带领学员共同完成了猜想的

验证过程。

## 6 水到渠成, 获得拉格朗日乘数法

验证完猜想, 笔者带领学员继续分析等式(1), 并创设一系列问题: 函数在一点处的偏导数是什么? 两个函数在一点处的偏导数之比是什么? 能不能将  $\frac{f_x(x_0, y_0)}{\varphi_x(x_0, y_0)}$  这个值用常数  $\lambda_0$  表示? 能用常数  $-\lambda_0$  表示吗? 等等, 学员通过对上述问题的解答, 最终得到结论: 在极值点  $(x_0, y_0)$  处, 方程组(2)成立。

$$\begin{cases} f_x(x_0, y_0) + \lambda_0 \varphi_x(x_0, y_0) = 0 \\ f_y(x_0, y_0) + \lambda_0 \varphi_y(x_0, y_0) = 0 \\ \varphi(x_0, y_0) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

针对方程组(2), 笔者提出了以下问题: 从代数学的角度分析, 点  $(x_0, y_0, \lambda_0)$  能否看成是方程组的解? 哪个方程组呢? 该方程组具有什么特征? 该方程组能否看成是某个函数的偏导数构成的方程组? 如果点  $(x_0, y_0)$  是所求的条件极值点, 那么点  $(x_0, y_0, \lambda_0)$  一定是方程组的解吗? 在数学中, 使一个函数的一阶偏导数同时为零的点叫做什么? 上述问题都是基本问题, 学员通过解决上述问题, 最终得到结论: 如果点  $(x_0, y_0)$  是所求的条件极值点, 那么点  $(x_0, y_0, \lambda_0)$  一定是函数  $L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y)$  的驻点。此时, 笔者又提出问题: 根据所得结论, 能否得到求解条件极值的方法? 一般解题步骤是什么? 上述方法的前提条件是什么? 学员讨论完, 笔者进行讲评、归纳和总结, 最终得到如下结论: 若  $f(x, y)$ 、 $\varphi(x, y)$  在定义域内具有一阶连续偏导数, 且  $\varphi_x$ 、 $\varphi_y$  不同时为零, 则求函数  $f(x, y)$  在条件  $\varphi(x, y) = 0$  限制下的极值的一般步骤是:

Step 1 构造辅助函数

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y);$$

Step 2 解方程组

$$\begin{cases} L_x = f_x(x, y) + \lambda \varphi_x(x, y) = 0 \\ L_y = f_y(x, y) + \lambda \varphi_y(x, y) = 0; \\ L_\lambda = \varphi(x, y) = 0 \end{cases}$$

Step 3 考查驻点是不是极值点。

探索到这里, 笔者告诉学员这种方法其实就是“拉格朗日乘数法”, 其中引进的  $\lambda$  称为“拉格朗日乘子”, 构造的辅助函数  $L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y)$  称为“拉格朗日函数”, 这样就还原了“拉格朗日乘数法”的创建过程, 让学员在探索过程中

获取了知识。至此,本节课并没有结束,此时笔者又介绍了拉格朗日创建“拉格朗日乘法”的数学史,及“拉格朗日乘法”这种思想在最优化理论与方法发展史上的重要价值,这样不但提高了学员的学习兴趣,而且让学员感受到了前辈们发现、创造数学知识的艰辛<sup>[3]</sup>。

## 7 应用和推广拉格朗日乘法解决实际问题,掌握解题方法,加深理解

为了让学员理解并掌握拉格朗日函数法的构造方法以及用拉格朗日乘法解决条件极值的具体过程,笔者精选了典型例题,让学员独立完成,然后笔者随机抽取几名学员的解题步骤展示在屏幕上,让所有学员讨论、点评、挑刺,笔者对学员的点评进行补充。最后,笔者告诉学员在实际应用中更常见的是  $n$  ( $n \geq 3$ ) 元函数受  $m$  ( $m < n$ ) 个限制的条件极值问题,自然而然地把针对二元函数所探索到的拉格朗日乘法推广到了  $n$  ( $n \geq 3$ ) 元函数。

## 8 归纳总结两种方法的实质,“化归”思想自然呈现

得到拉格朗日乘法法的推广形式后,笔者先让学员提炼并归纳总结“代入法”和“拉格朗日乘法”的本质、使用条件及适用范围,然后笔者进行必要的补充:“代入法”是将二元函数的条件极值问题转化成求一元函数的无条件极值问题,属于降元法;“拉格朗日乘法”是将二元函数的条件极值问题转化成求三元函数的无条件极值问题,属于升元法,无论是哪种方法都是将条件极值问题转化成无条件极值问题进行求解的,这个“转化”也称为“化归”就是本节知识点主要的数学思想方法,另外,将实际问题通过数学建模的方法转化成数学问题也属于“化归”。这样“化归”这个思

想方法就水到渠成、自然而然地获得了,而不是教员硬生生地告诉学员什么是“化归”了,接着笔者又介绍了日常生活中、“高等数学”课程中“化归”思想的应用,让学员体会、感受“化归”的美。至此,课堂上的“拉格朗日乘法”以学为中心的互动探究性教学过程就结束了。

以学为中心的互动探究性教学还原了知识的创建过程,融入了数学思想方法,有利于提升学员的数学素养。需要注意的是,以学为中心的互动探究性教学中,教员是学员探索活动的设计者和学员探索过程中的引导者,所以,要想充分发挥好互动探究性教学的优势,教员必须提高自身素质、熟悉教学内容、了解教学对象,这样才能充分发挥好自己的主导作用<sup>[7]</sup>。

### [参 考 文 献]

- [1] 任长松.探究式学习[M].北京:教育科学出版社,2005:3.
- [2] 徐永琳,田巧玉,文艳艳.微积分探究性学习的理论与实践研究[M].北京:中国水利水电出版社,2016:38.
- [3] 景慧丽,李应岐,屈娜.探索式教学法在“常数变易法”教学中的应用[J].内蒙古师范大学学报(教育科学版),2017,30(10):125-128.
- [4] 马知恩,王绵森.工科数学分析基础(下册)[M].2版.北京:高等教育出版社,2006:75.
- [5] 景慧丽,赵伟舟,王惠珍,等.问题牵引式教学法在“方向导数”教学中的应用[J].首都师范大学学报(自然科学版),2015,36(6):13-17.
- [6] 熊惠民.数学思想方法通论[M].北京:科学出版社,2010:25.
- [7] 景慧丽,王正元,赵伟舟,等.基于教学法的学员创造性思维能力的培养研究[J].河南教育学院学报(自然科学版),2015,24(1):60-63.

(责任编辑:熊文涛)